FÍSICA ONLINE

JAVIER GARCÍA

QUANTUM FIELD THEORY (39)

Verificar $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}$

Teniendo en cuenta que $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ i que [A,B]=-[B,A] nos podemos reducir a 5 casos:

1. 4 índices iguales: $\mu = \nu = \rho = \sigma$

$$[M^{\mu\mu}, M^{\mu\mu}] = g^{\mu\mu}M^{\mu\mu} - g^{\mu\mu}M^{\mu\mu} - g^{\mu\mu}M^{\mu\mu} + g^{\mu\mu}M^{\mu\mu} = 0$$

   Correcto, pués toda matriz conmuta consigo misma y además $M^{\mu\mu} = 0 \ \forall\mu$.

2. 3 índices iguales: $\mu = \nu = \rho$

$$[M^{\mu\mu}, M^{\mu\sigma}] = g^{\mu\mu}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\mu}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\mu\mu} + g^{\mu\sigma}M^{\mu\mu} = 0$$

   Correcto, pués $M^{\mu\mu} = 0$.

3. 2 índices iguales:
   I. $\mu = \nu$

$$[M^{\mu\mu}, M^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\mu\rho} = 0$$

   II. $\mu = \rho$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\mu\sigma}] = g^{\nu\mu}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\mu}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\mu} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\mu} = -g^{\mu\mu}M^{\nu\sigma}$$

   Reencontramos [K,K]=J (μ=0), [J,J]=J (μ,σ,ν≠0) i [K,J]=K (μ≠0; σ ó ν=0).

4. Todos diferentes:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = 0$$

   Correcto; correspon a los conmutadores entre J i K con superíndices iguales.

Comprobar $(M^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}$

Notemos que solo hay 2 posibilidades (que, en el fondo, son la misma) de que el resultado sea diferente de zero, que derivan de la definición de la g i la δ:

$$\mu = \alpha\,, \nu = \beta \ \Rightarrow\ (M^{\mu\nu})^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\mu}\delta^{\nu}_{\nu} = \begin{cases} 1\ (\mu = 0) \\ -1(\ \mu \neq 0) \end{cases}$$

$$\mu = \beta\,, \nu = \alpha \ \Rightarrow\ (M^{\mu\nu})^{\nu}{}_{\mu} = -g^{\nu\nu}\delta^{\mu}_{\mu} = \begin{cases} -1\ (\mu = 0) \\ 1(\ \mu \neq 0) \end{cases}$$

Correcte, pués (0,a) marca la posición del 1 en las K i (a,b) la del (-1) en las J.